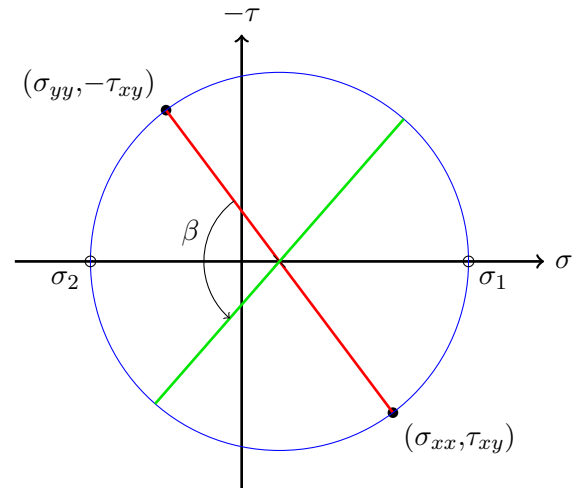


Cercle de Mohr : corrections

Conventions utilisées pour le cercle de Mohr

Pour tracer un cercle de Mohr en 2D correspondant à un tenseur des contraintes donné, commencez par dessiner un système de coordonnées avec σ sur l'axe des abscisses et $-\tau$ sur l'axe des ordonnées. Placez les points (σ_{xx}, τ_{xy}) et $(\sigma_{yy}, -\tau_{xy})$ et reliez-les avec un segment (en rouge). Le point d'intersection entre ce segment et l'axe σ est le centre d'un cercle (en bleu) passant par les deux autres points. Les contraintes principales σ_1 et σ_2 se trouvent aux points d'intersection entre le cercle et l'axe des abscisses, avec $\sigma_1 > \sigma_2$. Pour effectuer une rotation du système de coordonnées d'un angle α , il faut tourner le segment (rouge) d'un angle $\beta = 2\alpha$ (donnant le segment vert). Les angles sont définis dans le sens *anti-horaire* (Notez que, bien que contre-intuitif, si l'axe des ordonnées n'était pas inversé, les angles auraient dû être définis dans le sens horaire).



Exercice 1 :

L'état de contrainte dans lequel les seules composantes de la contrainte non nulles sont $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ est appelé cisaillement simple. Autrement dit le tenseur des contraintes a la forme :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

1. Trouvez les contraintes et directions principales.
2. Trouvez la contrainte de cisaillement maximale et la direction sur laquelle elle agit.

Solution :

1. Les contraintes principales sont les valeurs propres de la matrice des contraintes.

$$\det(\underline{\sigma} - \lambda \underline{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \tau \\ \tau & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \tau^2 = (\tau - \lambda)(\tau + \lambda) = 0 \quad (2)$$

Les contraintes principales sont donc $\pm\tau$. On cherche les directions principales. Pour la valeur propre $\sigma_I = \tau$:

$$\begin{cases} -\tau x + \tau y = 0 \\ \tau x - \tau y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \quad (3)$$

ainsi le vecteur propre normé est $\underline{n}_I = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$.

Pour la valeur propre $\sigma_{II} = -\tau$:

$$\begin{cases} \tau x + \tau y = 0 \\ \tau x + \tau y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases} \quad (4)$$

ainsi le vecteur propre normé est $\underline{n}_{II} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1)$.

2. La contrainte de cisaillement maximale est obtenu par :

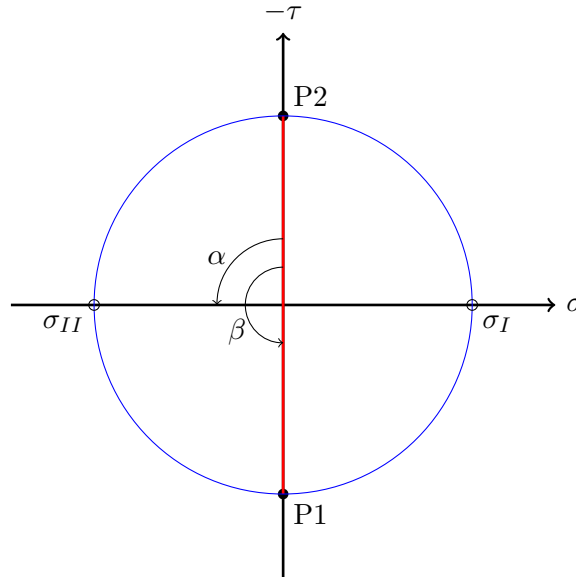
$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (5)$$

où $\sigma_{\max}$ et $\sigma_{\min}$ sont la plus grande et la plus petite des contraintes principales, respectivement. Dans ce cadre :

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\tau - (-\tau)}{2} = \pm \tau \quad (6)$$

L'état de contrainte donné dans l'énoncé est dans le repère du cisaillement maximal τ . Ainsi le cisaillement maximale agit sur les plans de normale $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Remarque : L'exercice peut être résolu plus facilement à l'aide du cercle de Mohr. En utilisant les points $(0, \tau)$ et $(0, -\tau)$, on obtient un cercle centré à l'origine. Les contraintes principales se lisent sur l'axe σ . On obtient $\sigma_I = \tau$ et $\sigma_{II} = -\tau$ comme avec la résolution analytique. Pour passer à l'état des contraintes principales, il faut effectuer une rotation de $\alpha = 90^\circ$ sur le cercle de Mohr, donc $\alpha/2 = 45^\circ$ dans le repère réel. Les directions principales sont donc obtenues en tournant le repère initial $((1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0))$ de 45° . On obtient les mêmes directions n_I et n_{II} qu'avec la solution analytique.



Les cisaillements maximaux $\pm\tau$ peuvent se lire directement sur le cercle de Mohr. Ils agissent sur les plans de normale $(1, 0, 0)$, l'état initial, et $(0, 1, 0)$, la rotation de $\beta/2 = 90^\circ$ depuis l'état initial.

Exercice 2 :

L'état de contrainte dans lequel seules les trois composantes normales sont non nulles est appelé état de contrainte tri-axial. Autrement dit, on considère une contrainte de la forme :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

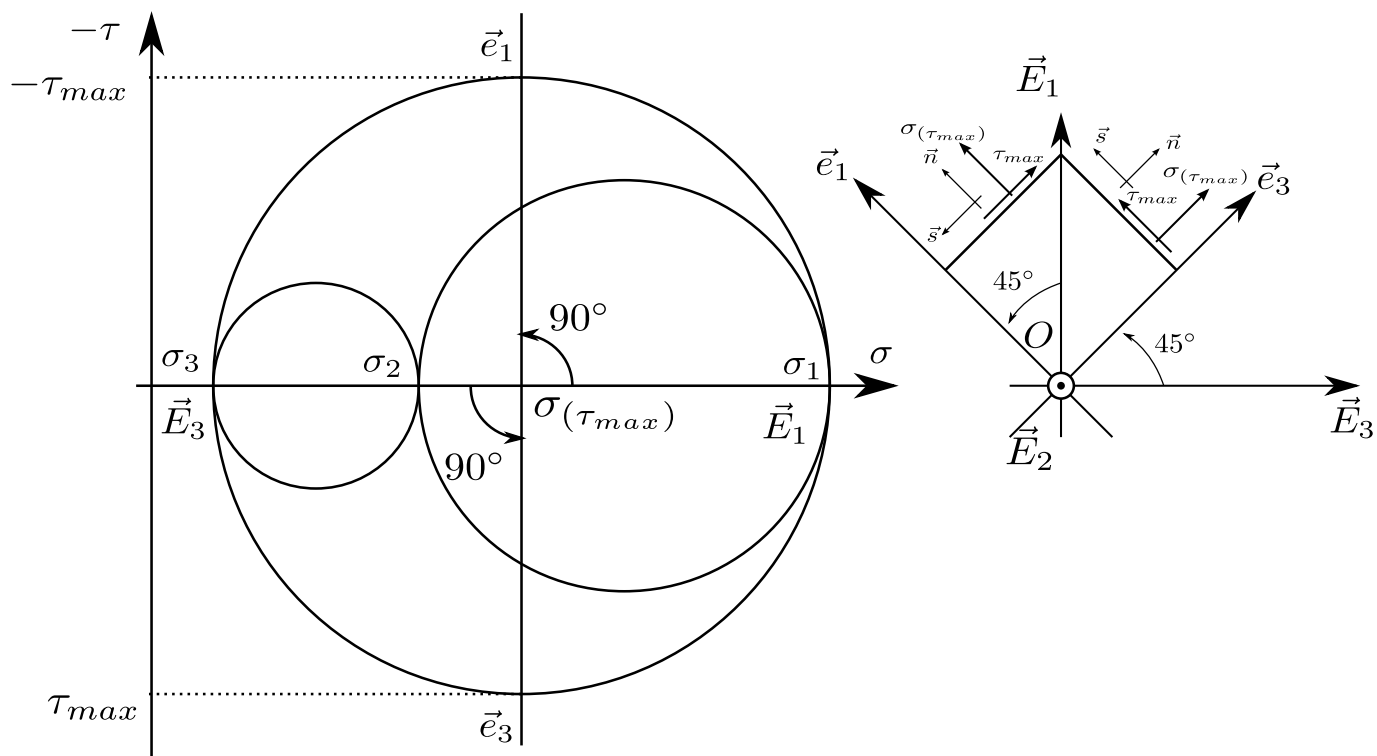
On suppose que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Exprimer la contrainte de cisaillement maximale et déterminer sur quel plan elle agit.

Solution :

La contrainte de cisaillement maximale est $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$.

déterminer sur quel plan la contrainte de cisaillement maximale agit.

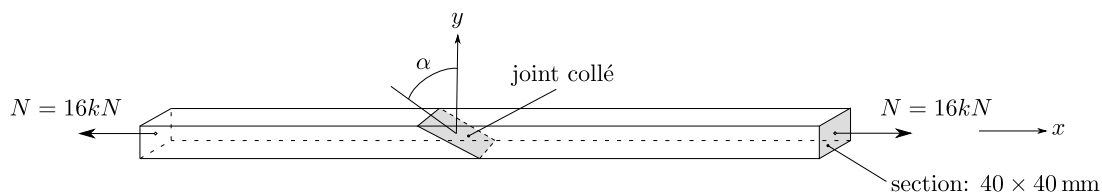


Les vecteurs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_3$ sont les directions principales où le tenseur des contraintes tri-axial est défini. Les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_3$ sont les directions où le cisaillement est maximal. Leurs orientations sont données en utilisant le plus grand cercle de Mohr (Attention : les angles sont multipliés par deux dans le cercle de Mohr). Ainsi, le cisaillement maximal agit sur les plans de normale $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, \pm 1)$.

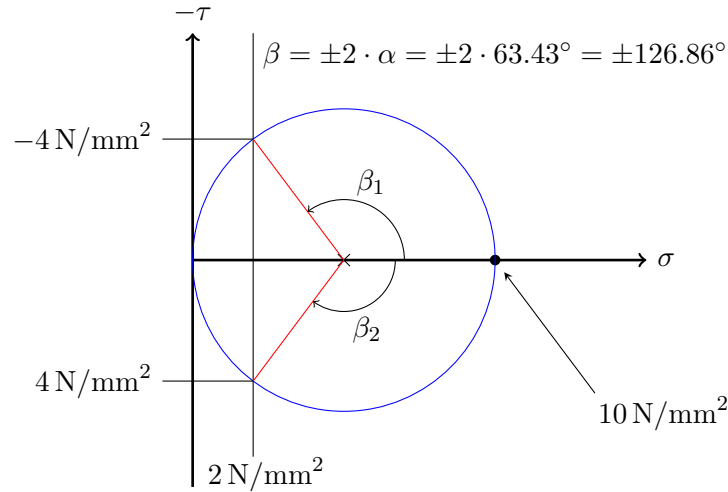
Exercice 3 : Cercle de Mohr

Série 5, exercice 7

Un barreau de section carrée $40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ est soumis à une force de traction $N = 16 \text{ kN}$. Déterminer graphiquement (cercle de Mohr) l'orientation α que l'on doit donner à un joint collé pour que la contrainte de traction n'y excède pas 2 N/mm^2 ; quelle est alors la contrainte tangentielle dans le joint ?



Solution :

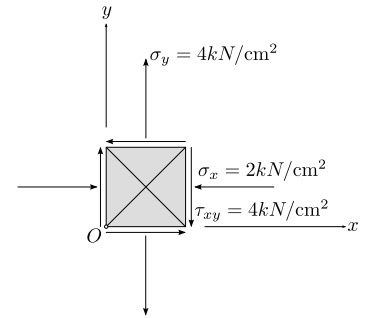


Exercice 4 : *Etat plan de contrainte*

Un état plan de contrainte en un point O d'un solide est défini par la valeur des contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} agissant sur les facettes d'un petit élément carré. En procédant graphiquement (cercle de Mohr), transformer cet état en l'état de contrainte

1. principal,
2. selon les diagonales du carré.

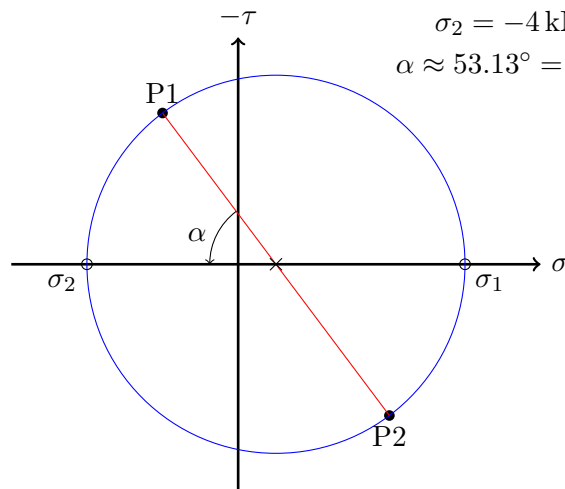
Pour chacun des deux états, dessiner les résultats sur un petit élément carré correctement orienté.



Solution :

$$\sigma_x = -2 \text{ kN/cm}^2, \sigma_y = 4 \text{ kN/cm}^2 \text{ et } \tau_{xy} = -4 \text{ kN/cm}^2$$

$$(1) \quad \begin{aligned} P1 &= (\sigma_x, \tau_{xy}), P2 = (\sigma_y, -\tau_{xy}) \\ \sigma_1 &= 6 \text{ kN/cm}^2 \\ \sigma_2 &= -4 \text{ kN/cm}^2 \\ \alpha &\approx 53.13^\circ = 2 \cdot 26.57^\circ \end{aligned}$$



(2)

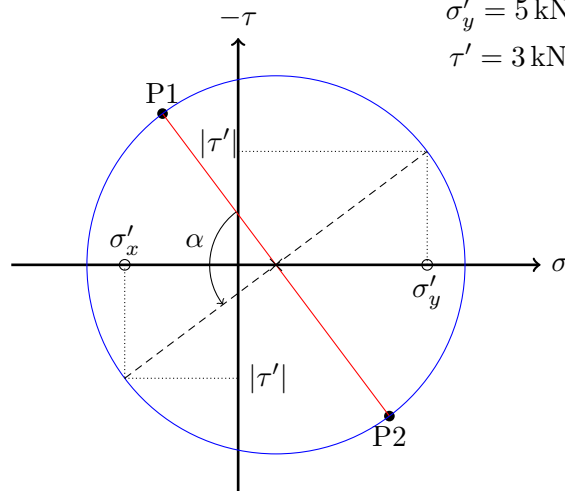
$$P1 = (\sigma_x, \tau_{xy}), P2 = (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\alpha = 2 \cdot 45^\circ$$

$$\sigma'_x = -3 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma'_y = 5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau' = 3 \text{ kN/cm}^2$$



Exercice 5 : Cercle de Mohr 3D

Série 5, exercice 6

Les composantes cartésiennes du tenseur contraintes σ_{ij} au point 0 d'un solide sont

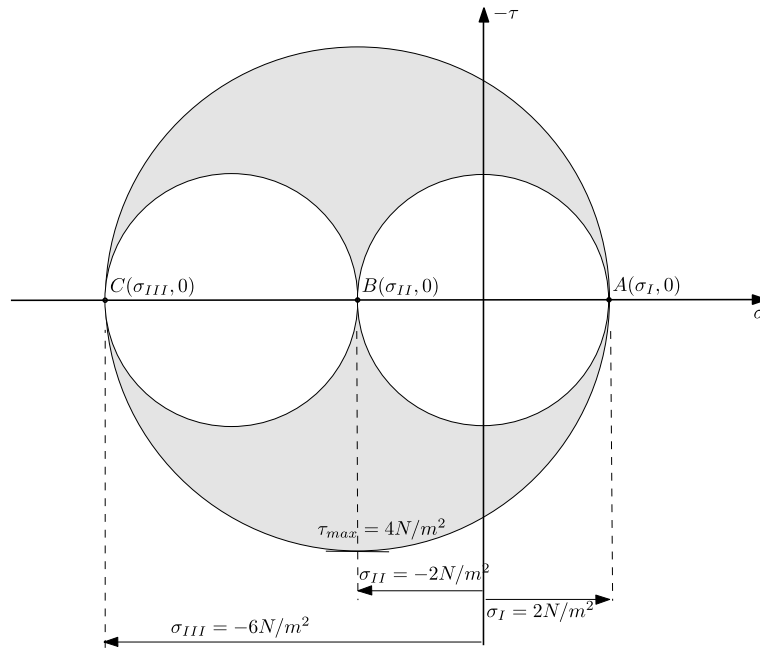
$$\begin{bmatrix} -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & -1 \end{bmatrix} [\text{N/mm}^2]$$

Trouver (série 5, exercice 4) :

1. les contraintes normales principales,
2. la matrice des cosinus directeurs des axes principaux,
3. la contrainte normale moyenne,
4. le tenseur déviateur,
5. la contrainte tangentielle maximale,

et dessiner le tricerclé de Mohr (nouveau).

Solution :



Exercice 6 :

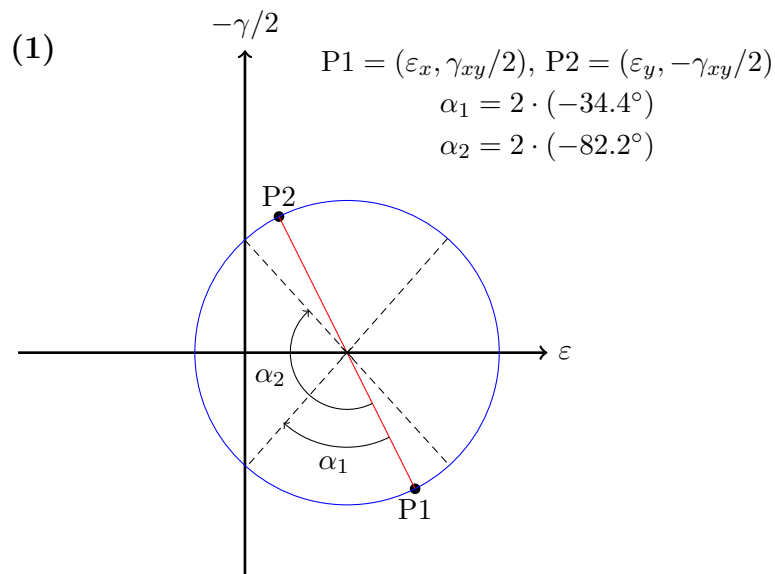
En un point d'un problème plan de déformation, les déformations valent

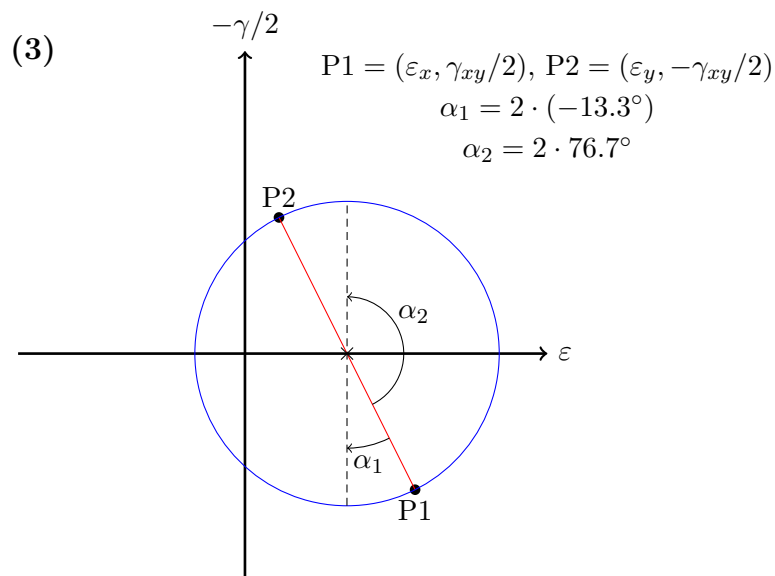
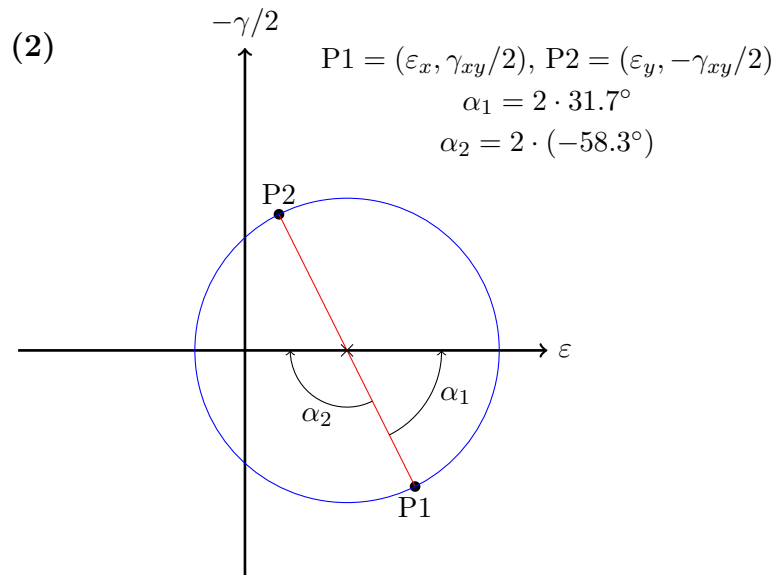
$$\varepsilon_x = 450 \cdot 10^{-6} \quad \varepsilon_y = 90 \cdot 10^{-6} \quad \gamma_{xy} = 720 \cdot 10^{-6} \quad (8)$$

En utilisant le cercle de Mohr, trouver les directions pour lesquelles :

1. la déformation normale est nulle
2. le glissement est nul
3. le glissement est maximal

Solution :





Exercice 7 :

Série 4, exercice 2

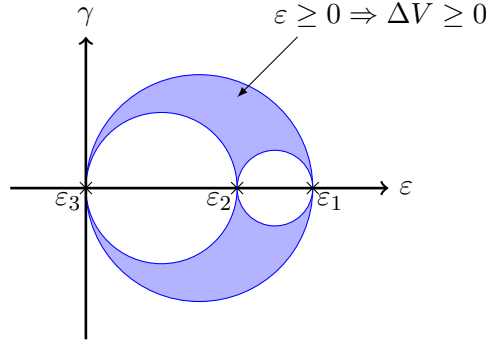
Les composantes du tenseur des déformations en un point d'un milieu continu s'expriment :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = k, \quad \varepsilon_{33} = 3k, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad k > 0 \quad (9)$$

Peut-on trouver une direction pour laquelle la déformation est négative? Utiliser le cercle de Mohr.

Solution :

Série 4, exercice 2 : $\varepsilon_1 = 3k, \varepsilon_2 = 2k, \varepsilon_3 = 0$.



Exercice 8 : Tenseur des contraintes 1

On suppose que le vecteur de la force de gravité est égal à $\underline{b} = -\rho g \underline{e}_3$, où g est le module de l'accélération de la pesanteur à la surface de la terre et ρ la masse volumique du matériau. On considère le tenseur des contraintes suivant :

$$\underline{\sigma} = \alpha \begin{bmatrix} x_2 & -x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_2 & \beta(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Déterminer l'expression de $\beta(x_1, x_2, x_3)$ de façon à ce que $\underline{\sigma}$ satisfasse les équations d'équilibre.

Solution :

L'équation tensorielle d'équilibre s'écrit :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) + \underline{b} = \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) - \rho g \underline{e}_3 = \underline{0} \quad (11)$$

Avec :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (12)$$

donc (11) devient :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) + \underline{b} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 + \frac{\partial \beta}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

d'où $\beta(x_1, x_2, x_3) = (1 + \rho \frac{g}{\alpha})x_3 + C(x_1, x_2)$ pour que $\underline{\sigma}$ satisfasse les équations d'équilibre avec C une constante.

Exercice 9 : Tenseur des contraintes 2

Soit un matériau occupant un demi-espace infini où $x_2 \geq x_1$. L'état de contrainte dans le matériau est le suivant :

$$\underline{\sigma} = \alpha \begin{bmatrix} Ax_2 & x_1 & 0 \\ x_1 & Bx_1 + Cx_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(Bx_1 + (A + C)x_2) \end{bmatrix} \quad (14)$$

où A , B et C sont des constantes.

1. Déterminer la valeur de C de façon à ce que $\underline{\sigma}$ satisfasse les équations d'équilibre en l'absence de force de gravité.
2. Le vecteur traction est nul sur le plan $x_1 - x_2 = 0$. Déterminer les valeurs de A et de B .

Solution :

1. L'équation tensorielle d'équilibre dans le cas où la force de gravité est absente s'écrit

$$\underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

donc C doit être égal à -1 .

2. Le plan $x_1 - x_2 = 0$ ne subit aucune contrainte, le vecteur normal $\underline{n}$ au plan orienté vers l'extérieur du matériau est donné par :

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Le vecteur traction $\underline{t}$ du plan est obtenu avec $\underline{t} = \underline{\sigma}\underline{n}$:

$$\underline{t} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} Ax_2 & x_1 & 0 \\ x_1 & Bx_1 - x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(Bx_1 + (A-1)x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} Ax_2 - x_1 \\ x_1 - Bx_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

En sachant que le vecteur traction sur le plan $x_1 - x_2 = 0$ est nul ($\underline{t} = \underline{0}$), on trouve $A = 1$ et $B = 2$ car $x_1 = x_2$.

Exercice 10 : Exercice 3 de l'examen 2014

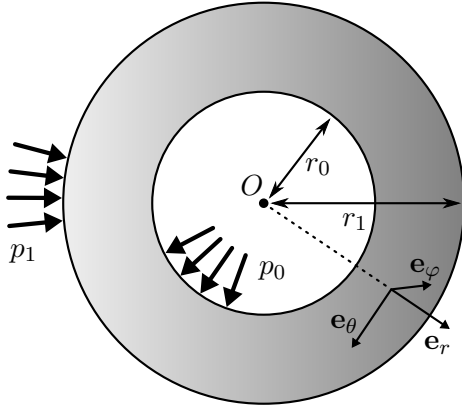


FIGURE 1 – Section de l'enveloppe sphérique

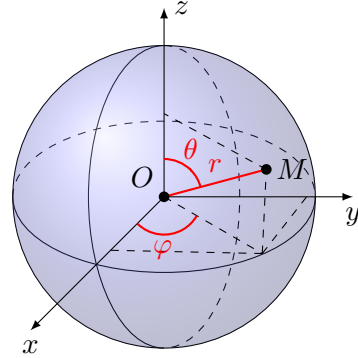


FIGURE 2 – Coordonnées sphériques

On considère le réservoir sphérique de centre O de rayons intérieur et extérieur respectivement r_0 et r_1 (voir figure 1) dans un système de coordonnées sphériques orthonormées de centre O , les données sont les suivantes :

- les forces de volume sont nulles ;
- les conditions aux limites sont exclusivement des efforts surfaciques et s'énoncent comme suit :
 - pression normale uniforme égale à p_0 exercée à l'intérieur de la sphère (soit en $r = r_0$) ;
 - pression normale uniforme égale à p_1 exercée à l'extérieur de la sphère (soit en $r = r_1$).
- le champ de contraintes en coordonnées sphériques (voir figure 2) est de la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= A - \frac{2B}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3} \\ \sigma_{\theta\phi} &= \sigma_{r\phi} = \sigma_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

— RAPPEL : la divergence d'un tenseur en coordonnées sphériques est

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{T} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + \frac{T_{r\theta}}{\tan \theta} \right) \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}}{\tan \theta} + 3T_{r\theta} \right) \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(3T_{r\varphi} + \frac{2T_{\theta\varphi}}{\tan \theta} \right) \right) \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

1. Vérifier que le champ de contraintes satisfait les équations d'équilibre.
2. Déterminer le vecteur contrainte sur une surface sphérique de rayon a .
3. Déterminer A et B en fonction de p_0 pour $p_1 = 0$.

Solution :

1. Vérifier que le champ de contraintes satisfait les équations d'équilibre.
On a bien $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}), 0, 0 \right] = \mathbf{0}$
2. Déterminer le vecteur contrainte sur une surface sphérique de rayon a .
 $\underline{t}(\underline{e}_r) = \boldsymbol{\sigma} \underline{e}_r = \sigma_{rr} \underline{e}_r = \left(A - \frac{2B}{a^3} \right) \underline{e}_r$
3. Déterminer A et B en fonction de p_0 pour $p_1 = 0$.
En $r = r_0$, la normale à la surface est $\underline{n} = -\underline{e}_r$, on a donc

$$\underline{t} = -\boldsymbol{\sigma} \underline{e}_r = -\sigma_{rr} = -A + \frac{2B}{r_0^3} = p_0 \quad (19)$$

En $r = r_1$, la normale à la surface est $\underline{n} = \underline{e}_r$, on a donc

$$\underline{t} = \boldsymbol{\sigma} \underline{e}_r = \sigma_{rr} = A - \frac{2B}{r_1^3} = p_1 = 0 \quad (20)$$

On peut donc identifier

$$A = \frac{p_0 r_0^3}{r_1^3 - r_0^3} \quad \text{et} \quad B = \frac{p_0 r_0^3 r_1^3}{2(r_1^3 - r_0^3)} \quad (21)$$